

# Вариант 49

① max-min, min-max,  $\exists$ ? сеп. точки

|       |    |    |    |    |    |    |    |                                                                                      |
|-------|----|----|----|----|----|----|----|--------------------------------------------------------------------------------------|
| $A =$ | 2  | -9 | 6  | 5  | -1 | -6 | -4 | } $\begin{matrix} \text{min} \\ -9 \\ -8 \\ -9 \\ -9 \\ -6 \\ -9 \\ -9 \end{matrix}$ |
|       | 1  | -6 | 1  | 8  | 3  | 10 | -8 |                                                                                      |
|       | -8 | -9 | 0  | 9  | -2 | 9  | 5  |                                                                                      |
|       | 2  | 3  | -8 | -7 | -1 | -9 | 8  |                                                                                      |
|       | 8  | -6 | 5  | 8  | 5  | -4 | 0  |                                                                                      |
|       | -6 | 1  | 4  | -1 | -9 | -4 | 8  |                                                                                      |
|       | 0  | 7  | -4 | 0  | -9 | 8  | 10 |                                                                                      |
| <hr/> |    |    |    |    |    |    |    |                                                                                      |
| max   | 8  | 7  | 6  | 9  | 5  | 10 | 10 |                                                                                      |
|       |    |    |    |    |    |    |    | minmax $\sim \sqrt{\quad}$                                                           |

Сепаратной точки не существует: ~~по~~ по критерию 2.1, для существования таковой необходимо и достаточно выполнение равенства  $\max_{x \in X} \inf_{y \in Y} F(x, y) = \min_{y \in Y} \sup_{x \in X} F(x, y)$ .

В нашем случае  $-6 \neq 5 \Rightarrow$  сеп. точки нет

② max-min, min-max,  $\exists$ ? сеп. точки

$$X \times Y = [0, 1] \times [0, 1];$$

$$F(x, y) = 6x^2 - 8xy + 5y^2$$

$\Delta F(x, y) = f(y)$ . Т.к.  $f(y)$  выпукла вниз (ибо  $f''(y) \equiv 10$ ), имеем единственную точку минимума:  $y_0 = \frac{8x}{10} = \frac{4}{5}x$ . Ф-ция минимума  $F(x, y)$  будет иметь вид  $W(x) = \frac{30}{5}x^2 - \frac{32}{5}x^2 + \frac{16}{5}x^2 = \frac{14}{5}x^2$ , что при  $x \in [0, 1]$  даёт  $\underline{v} = \frac{14}{5}$  при  $x^0 = 1$ .

(продолжение (2))

Теперь  $F(x, y) = g(x)$ .

Максимум  $g(x)$  ввиду её выпуклости впис  
будет достигаться на границах  $[0, 1]$ .

Обозначим через  $M(y)$  данную функцию:

$$\max_x F(x, y) = \max \{F(0, y), F(1, y)\} =$$

$$= \max \{5y^2, 5y^2 - 8y + 6\}.$$

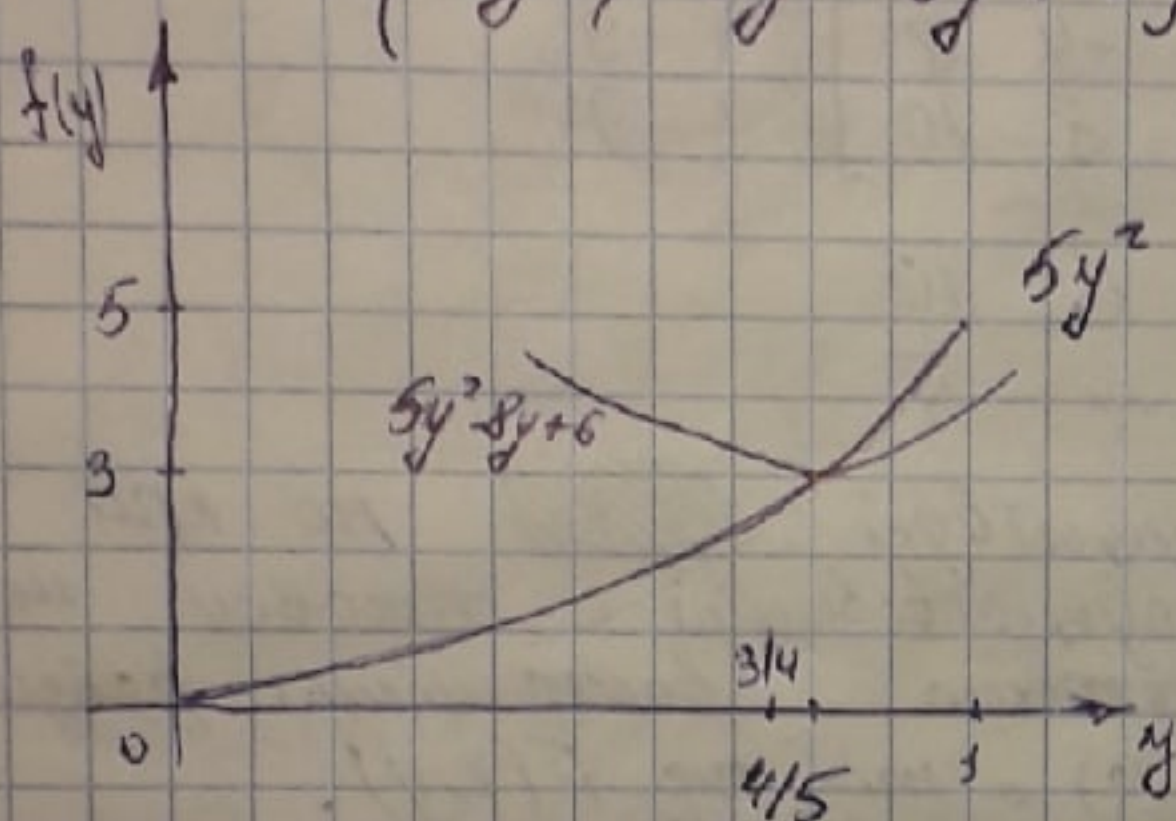


График неинного  
издающийся:  
вторая функция  
имеет минимум  
в  $y = 4/5$ , а пересе-  
кается параболы  
в  $y^0 = 3/4$

$$\text{Т.о., } \max_x F(x, y) = M(y) = \begin{cases} 5y^2 - 8y + 6, & y \in [0, 3/4]; \\ 5y^2, & y \in [3/4, 1]. \end{cases}$$

$$\min_y M(y) = \underline{45/16}, \text{ что достигается при } y^0 = 3/4.$$

$\underline{45/16} = \sqrt{}$

Очевидно,  $\underline{y} \neq \bar{y}$ , и седловой точки данная  
игра не имеет. Максимум: 1; минимум:  
макс:  $3/4$ .

### ③ Решить матричную игру

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 2 & 6 & 9 \\ 4 & 4 & 5 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & -4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & -3 & 4 \\ 6 & 4 & 3 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

слабо  
доминируется  
4-ой столбец

слабо доминируется  
4-ой строкой

слабо доминируется 2-ой строкой  
слабо доминируется 5-ой строкой  
(или строго домин. 2-ой)

Запишем промежуточный результат:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

доминируется  
средний 2-ой и 3-й столбцов

слабо доминируется средними 1-ой и 2-ой строками

Итого:  $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ ; полученная как  $A$  с

вычеркнутыми 3, 4, 5 строками и 1, 2, 5 столбцами.  
Вычеркнутые элементы будут входить в вероятностные стратегии нуль в искомым смешанной стратегии. Запишем систему для получения  $p$ :

$p$ :

$$\begin{cases} 2p + 5(1-p) = v \\ 6p + 1(1-p) = v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2p + 5 - 5p = v \\ 6p + 1 - p = v \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2p + 5(1-p) = v \\ 6p + 1 - p = v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3p + 5 = 5p + 1 \\ 5p = -4p + 6 \end{cases}$$

$$p = \frac{1}{2}; v = \frac{7}{2}$$

Аналогично для  $q$ :

$$\begin{cases} 2q + 6(1-q) = v \\ 5q + 1 - q = v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4q + 1 = -4q + 6 \\ 5q = -4q + 6 \end{cases}$$

$$q = \frac{5}{8}$$

Итого: решение игры -  $(p^0 = (1/2, 1/2, 0, 0, 0); q^0 = (0, 0, 5/8, 3/8, 0); 7/2)$

④ Решить матричную игру

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 & 4 & 7 & 9 \\ 6 & 5 & 3 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} p_1 \\ (1-p_1) \end{array} \right.$$

Игра имеет матрицу вида  $(2 \times n) \Rightarrow$  решать её графическим способом. Выписать уравнения для прямых:

$$l_1(p_1) = -2p_1 + 6(1-p_1) = -8p_1 + 6;$$

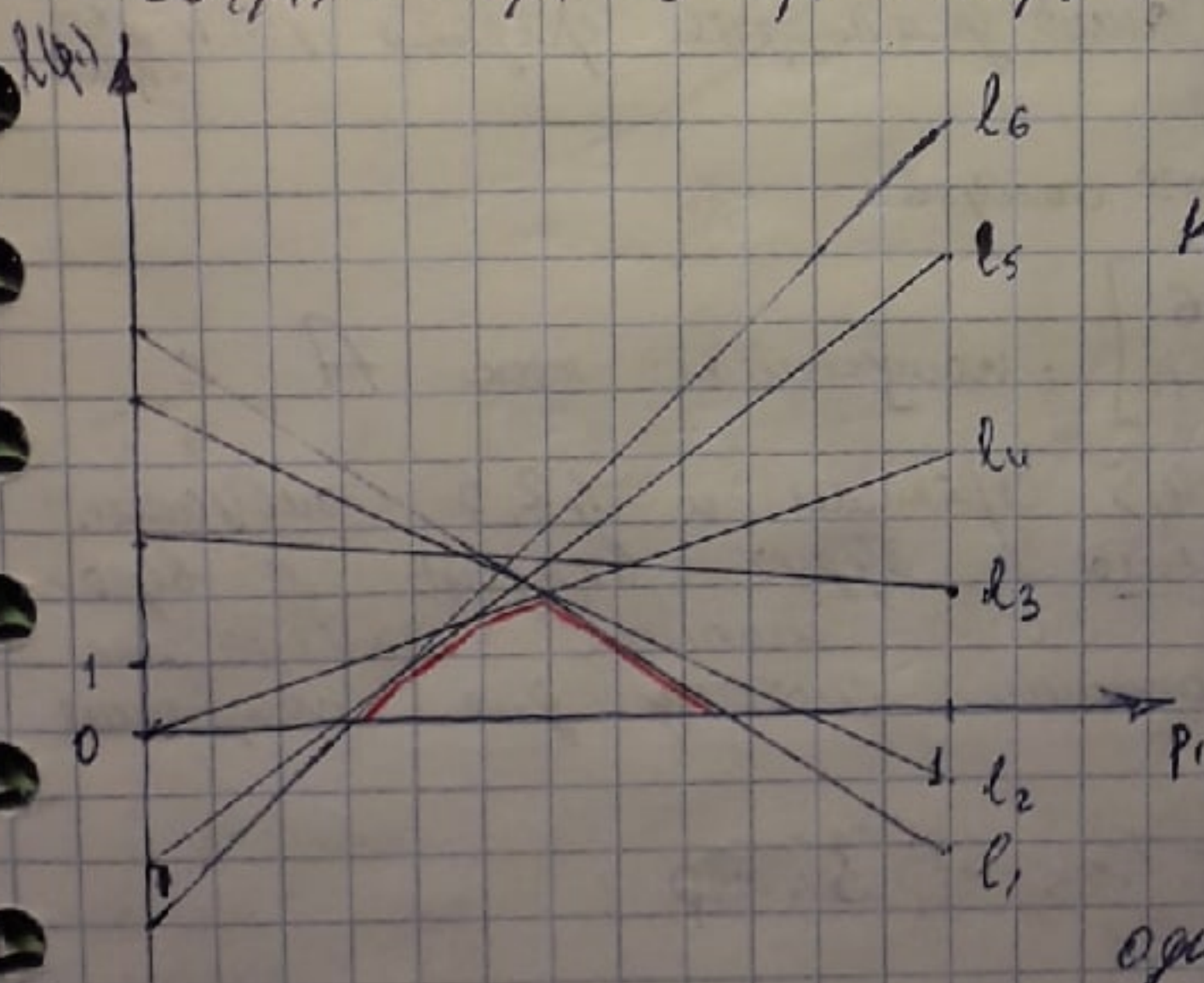
$$l_2(p_1) = -p_1 + 5 - 5p_1 = -6p_1 + 5;$$

$$l_3(p_1) = 2p_1 + 3 - 3p_1 = -p_1 + 3;$$

$$l_4(p_1) = 4p_1;$$

$$l_5(p_1) = 7p_1 - 2 + 2p_1 = 9p_1 - 2;$$

$$l_6(p_1) = 9p_1 - 3 + 3p_1 = 12p_1 - 3.$$



Красным выделены  
линии спадающие.  
Каждый на макси-  
мум: пересечение  
 $l_1$  и  $l_2$ :

$$-8p_1 + 6 = -6p_1 + 5;$$

$$2p_1 = 1 \Rightarrow p_1 = 1/2.$$

Стоит искать в  
виду, что эта  
точка удовлево-  
рляет в Т.ч.  
пересечению  $l_1$  и  $l_4$ .

Т.к.  $l_1$  и  $l_2$  имеют  
одинаковый знак у  
производной,  $q^0$  не их  
основе поиграть не будем.

Используем пересечение  $l_1$  и  $l_4$  и запишем систему для  $q^*$ :

$$\begin{cases} -2q^* + 4(1-q^*) = 5; \\ 6q^* = 5. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6q^* + 4 = 5 \\ 6q^* = 5 \end{cases} \Rightarrow q^* = 1/3; \quad 5 = 2.$$

Ответ:  $(p^0 = (1/2, 1/2); q^0 = (1/3, 0, 0, 2/3, 0, 0); 2)$ .

⑤ Решить матричную игру

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 8 & 8 \\ -2 & 2 & -1 & 7 \\ 7 & 6 & 4 & -10 \end{bmatrix}$$

Вычеркнем 3-й столбец. Запишем расширенную матрицу для нахождения  $q^0$ :

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 0 & -4 & 8 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 7 & -1 & 0 \\ 7 & 6 & -10 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 7 & 6 & -10 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 9/2 & -1/2 & 1 \\ 0 & -4 & 8 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 7 & 6 & -10 & -1 & 0 \\ 0 & 26/7 & 29/7 & -9/7 & 0 \\ 0 & 2 & 9/2 & -1/2 & 1 \\ 0 & -4 & 8 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 7 & 6 & -10 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & -1 & 0 \\ 0 & 26/7 & 29/7 & -9/7 & 0 \\ 0 & 0 & 59/26 & 5/26 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 7 & 6 & -10 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 81/7 & -31/14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 203/324 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$q^0 = \left( \frac{14}{29}, \frac{43}{203}, \frac{62}{203} \right)$$

$$q^0 = \left( \frac{14}{29}, \frac{43}{203}, 0, \frac{62}{203} \right)$$

Теперь запишем расширенную матрицу для  $p^0$ , предварительно транспонировав:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 0 & -2 & 7 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 6 & -1 & 0 \\ 8 & 7 & -10 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 8 & 7 & -10 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 6 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 7 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 8 & 7 & -10 & -1 & 0 \\ 0 & 11/2 & 1 & -3/2 & 0 \\ 0 & 3/2 & 5/2 & -1/4 & 1 \\ 0 & -2 & 7 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 8 & 7 & -10 & -1 & 0 \\ 0 & 11/2 & 1 & -3/2 & 0 \\ 0 & -2 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 31/4 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \dots$$

(пропустили (5))

$$\dots \Rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 8 & 7 & -10 & -1 & 0 \\ 0 & 11/2 & 1 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 81/11 & -17/11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 203/324 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow p^0 = \left( \frac{59}{203}, \frac{76}{203}, \frac{68}{203} \right)$$

Проверим две таких смешанных стратегии  
выполнение условия  $A(p^0, j) \geq v$ ,

где  $j=3$  - номер выигранного столбца;  
 $v = \frac{324}{203}$  - цена игры.

$$\begin{aligned} A(p^0, 3) &= 3 \cdot \frac{59}{203} - \frac{76}{203} + 4 \cdot \frac{68}{203} = \\ &= \frac{373}{203} \geq \frac{324}{203}. \end{aligned} \quad \text{Выполнено.}$$

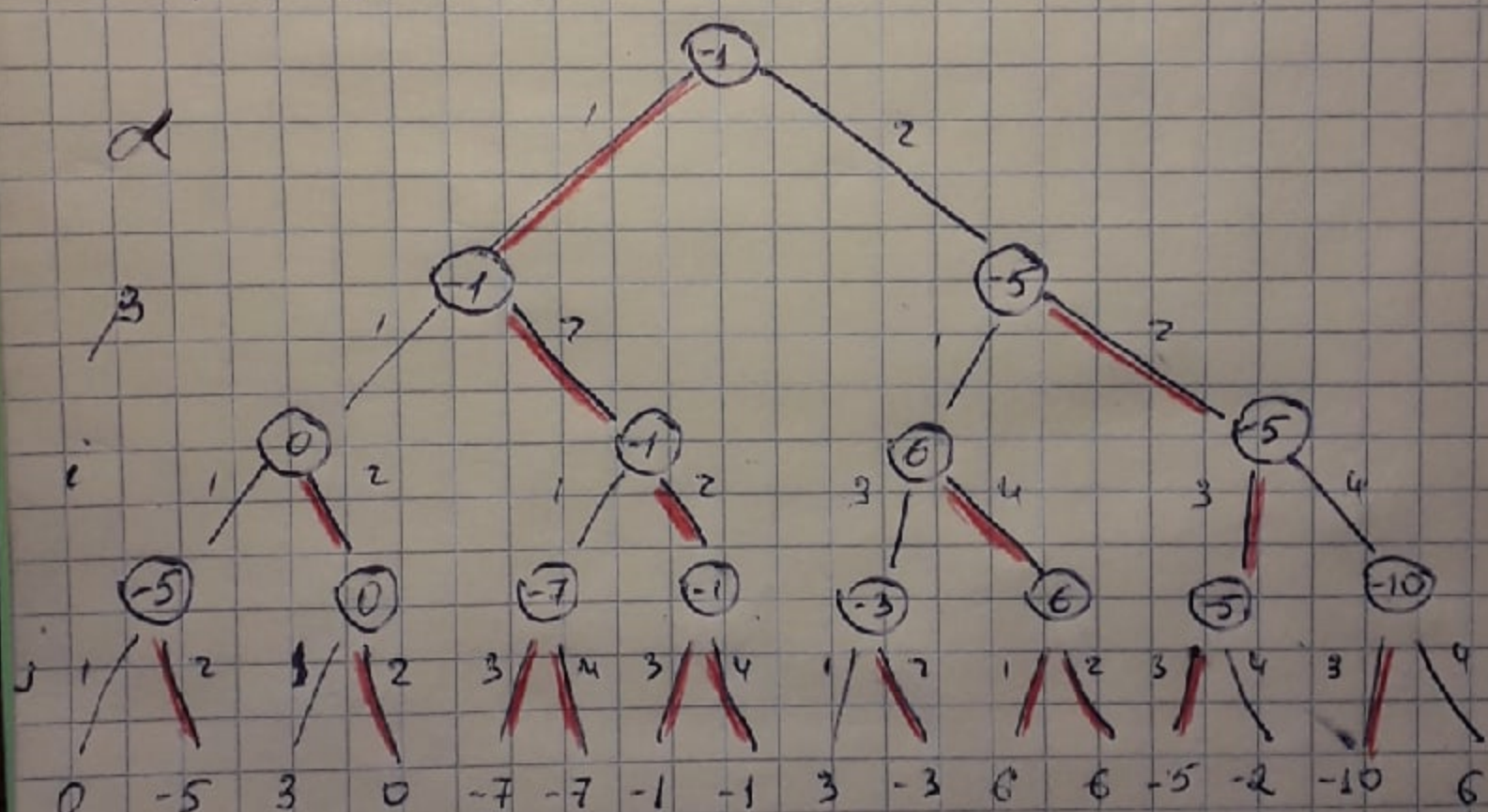
$$\text{Ответ: } \left( p^0 = \left( \frac{59}{203}, \frac{76}{203}, \frac{68}{203} \right); q^0 = \left( \frac{14}{29}, \frac{43}{203}, 0, \frac{62}{203} \right) \right)$$

7) Решить многоходовую игру с полной информацией и записать все оптимальные стр.

$$A = \begin{array}{c|cc|cc} \alpha_1 & 0 & -5 & -7 & -7 \\ \hline & 3 & 0 & -1 & -1 \\ \hline \alpha_2 & 3 & -3 & -5 & -2 \\ \hline & 6 & 6 & -10 & 6 \\ \hline & \beta_1 & & \beta_2 & \end{array}$$

Разобьем множество стратегий первого игрока на две подгруппы:  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ ; аналогичное действие проделаем для II-го.

Запишем позицию для данной игры:



Красивыми цветами обозначены оптимальные стратегии игроков не определенной игре. Оптимальные стратегии будут состоять из  $(\alpha, i)$  для первого и  $(\beta, j)$  для второго игрока.

$$\alpha^0 = 1; i^0(1, 1) = 2; i^0(1, 2) = 2; \tilde{V} = -1.$$

$$\beta^0 = \beta^0(\alpha); \beta^0(1) = 2, \beta^0(2) = 2;$$

$$j^0(\alpha, \beta, i): j^0(1, 2, 1) = \{3, 4\}; j^0(1, 2, 2) = \{3, 4\};$$

$$j^0(2, 2, 3) = 3; j^0(2, 2, 4) = 3.$$